

# Sur une inégalité fonctionnelle sur les variétés toriques avec application à la torsion analytique holomorphe

Mounir Hajli

## Résumé

Soit  $X$  une variété torique complexe projective non-singulière de dimension  $n$ , et  $E$  un fibré en droites équivariant et ample sur  $X$ . Notons par  $\mathcal{H}_{E,0}$  l'espace des métriques hermitiennes  $\mathcal{C}^\infty$ , positives et invariantes par l'action du tore compact de  $X$ .

Dans cet article, nous introduisons  $V_{\infty,*}$ , une fonctionnelle sur  $\mathcal{H}_{E,0}$ , nous étudions ses propriétés, et nous la comparerons à certaines fonctionnelles classiques. Comme application, nous étudions la variation de la torsion analytique holomorphe sur  $\mathcal{H}_{E,0}$ .

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Une inégalité fonctionnelle canonique sur une variété torique non-singulière</b>	<b>4</b>
2.1	La fonctionnelle $V_{\infty,*}$ . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Applications à la torsion analytique holomorphe</b>	<b>14</b>
3.1	Rappels . . . . .	14
3.2	Sur la variation de la torsion analytique holomorphe . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Rappel sur la fonctionnelle <math>\mathcal{F}_{\omega_0}</math> et résultats antérieurs connexes</b>	<b>19</b>
4.1	Comparaison de $\mathcal{F}_{\omega_0}$ et de $V_{\infty,*}$ . . . . .	20

## 1 Introduction

Soit  $X$  une variété torique complexe non-singulière, et  $E$  un fibré en droites équivariant et ample sur  $X$ . Nous introduisons une nouvelle fonctionnelle sur l'espace de métriques admissibles et invariantes par l'action du tore compact de  $X$  sur  $E$ . Grâce à la structure combinatoire de la variété, nous établissons que cette fonctionnelle est majorée. Nous la comparons à certaines fonctionnelles classiques, comme conséquence nous retrouvons quelques résultats classiques.

Commençons par rappeler la construction de certaines fonctionnelles classiques, ainsi que les résultats associés. Soit  $X$  une variété compacte kählérienne, et  $E$  est un fibré en droites ample sur  $X$ . Soit  $\omega_0$  une forme kählérienne dans la première classe de Chern  $c_1(E)$ . Si l'on pose

$$\mathcal{H}_{\omega_0} = \{u \in \mathcal{C}^\infty(X) \mid \omega_u := dd^c u + \omega_0 > 0\},$$

alors cet ensemble s'identifie à l'ensemble des métriques  $\mathcal{C}^\infty$  définies positives sur  $E$ . Classiquement, on définit deux fonctionnelles,  $\mathcal{E}_{\omega_0}$  et  $\mathcal{L}_{\omega_0}$ , sur  $\mathcal{H}_{\omega_0}$ . La première fonctionnelle  $\mathcal{E}_{\omega_0}$ , appelée la fonctionnelle

d'énergie qui apparaît dans les travaux d'Aubin cf. [1] et Mabuchi cf. [11], elle est définie comme suit :

$$\mathcal{E}_{\omega_0}(u) := \frac{1}{(n+1)!\text{Vol}(\omega_0)} \sum_{j=0}^n \int_X u (dd^c u + \omega_0)^j \wedge \omega_0^{n-j} \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\omega_0}.$$

On a,  $\omega_0$  définit une métrique kählérienne sur  $X$ , et donc sur  $K_X$ . Soit  $u \in \mathcal{H}_{\omega_0}$ ,  $u$  définit une métrique sur  $E$ . Donc on dispose d'une métrique sur  $H^0(X, L \otimes K_X)$ . La fonctionnelle  $\mathcal{L}_{\omega_0}$  est alors définie comme suit :

$$\mathcal{L}_{\omega_0}(u) := -\frac{1}{N} \log \det(\langle s_i, s_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq N} \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\omega_0},$$

avec  $s_1, \dots, s_N$  est un ensemble orthogonal de sections globales de  $E \otimes K_X$  pour la métrique définie par  $\omega_0$  et formant une base pour  $H^0(X, E \otimes K_X)$ , voir [3].

Si l'on pose,

$$\mathcal{F}_{\omega_0} = \mathcal{E}_{\omega_0} - \mathcal{L}_{\omega_0}.$$

Alors on montre, dans [3], le résultat suivant :

**Théorème 1.1.** *Soit  $K$  un groupe de Lie compact semi-simple qui agit transitivement sur  $X$ , et  $E$  un fibré en droites holomorphe  $K$ -homogène sur  $X$ . Soit  $\omega_0$  l'unique forme de Kähler invariante par l'action de  $K$  sur  $X$ . On a,*

$$\mathcal{F}_{\omega_0}(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\omega_0}.$$

Un des buts de cet article est présenter une nouvelle fonctionnelle notée  $V_{\infty, E, m}$ , définie dans le cadre des variétés toriques non-singulières. Nous montrerons que le fait que  $V_{\infty, E, m}$  soit bornée, implique une version faible du théorème ci-dessus. Plus précisément, on établit que si  $V_{\infty, E, m}$  est bornée alors  $\mathcal{F}_{\omega_0}$  l'est aussi.

Notre second objectif est motivé par la conjecture de Gillet-Soulé qui prédit le comportement du déterminant régularisé (voir définition (3.1)) quand la métrique varie sur le fibré  $E$ , cf. [8]. Lorsque  $X = \mathbb{P}^1$ , Berman utilise [3, corollaire 2] pour montrer cette conjecture, c'est à dire que le déterminant régularisé est majoré sur l'espace des métriques hermitiennes  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{O}(m)$ , cf. [3, § 1.2.1]. Notons qu'en dimension 1, cela revient à dire que l'opposé de la torsion analytique est majoré (voir (7)). Nous étudions la variation de la torsion analytique holomorphe moyennant la fonctionnelle  $V_{\infty, E, m}$ , nous établissons un résultat qui décrit la variation de la torsion analytique sur un espace de métriques sur un fibré en droites sur une variété torique non-singulière quelconque, par exemple  $\mathbb{P}^1$ . Ce résultat peut être vu comme une généralisation du [3, corollaire 4] dans le cadre des variétés toriques.

**Plan de l'article :** Soit  $X(\Sigma)$  une variété torique projective non singulière de dimension  $n$ , et  $E$  un fibré en droites ample sur  $X(\Sigma)$ . Nous commençons par associer à toute variété torique non singulière, une forme de volume continue, notée  $\omega_{E, \infty}^n$ . Cette construction est canonique, dans le sens qu'on n'a pas besoin de définir, à priori, une métrique kählérienne sur le fibré tangent  $TX(\Sigma)$  et que son expression est déterminée uniquement par la combinatoire de la variété, c'est l'objet du théorème (2.6). L'idée clé de la preuve utilise l'existence d'un recouvrement canonique associé à toute variété torique définie par un éventail.

Soit  $h$  une métrique hermitienne continue sur  $E$ . On définit un produit hermitien sur  $A^{(0,0)}(X(\Sigma), E)$ , l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à coefficients dans  $E$ , comme suit :

$$(s, t)_{L_{h, \infty}^2} = \int_{X(\Sigma)} h(s, t) \omega_{E, \infty}^n,$$

pour tous  $s, t \in A^{(0,0)}(X(\Sigma), E)$ .

On note par  $\mathcal{H}_{E,0}$ , l'espace des métriques admissibles et invariants par l'action du tore compact de  $X(\Sigma)$  sur  $E$ .

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , on introduit la fonctionnelle  $V_{\infty,E,m}$  sur  $\mathcal{H}_{E,0}$ , définie comme suit (voir paragraphe (2.1)) :

**Définition 1.2.** Soit  $X(\Sigma)$  une variété torique projective complexe non singulière. Pour tout  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , on définit sur  $\mathcal{H}_{E,0}$  la fonctionnelle suivante :

$$V_{\infty,E,m}(h) := \log h_{L^2,h^m,\infty_E} + 2 \int_{X(\Sigma)} \tilde{\text{ch}}(E^m, h^m, h_{\infty}^m) \quad \forall h \in \mathcal{H}_{E,0}.$$

où  $h_{\infty}$  est la métrique canonique de  $E$ ,  $h_{L^2,h^m,\infty_E}$  le volume  $L^2$  de  $H^0(X(\Sigma), E)$  induit par  $\omega_{E,\infty}^n$  et  $h^m$ , et  $\tilde{\text{ch}}(E^m, h^m, h_{\infty}^m)$  est la classe de Bott-Chern associée au caractère  $\text{ch}$ . Lorsque  $X(\Sigma) = \mathbb{P}^n$ , et  $E = \mathcal{O}(1)$ , on notera cette fonctionnelle par  $V_{\infty,m}$ .

Nous montrons que la fonctionnelle  $V_{\infty,E,m}$  est majorée sur  $\mathcal{H}_{E,0}$ , voir (théorème (2.12)) :

**Théorème 1.3.** Pour tout  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , il existe une constante  $c_m$  (resp.  $c_{E,m}$ ) qui dépend uniquement de  $m$  telle que

$$V_{\infty,m}(h) \leq c_m \quad \forall h \in \mathcal{H}_0 \cap \{h \leq h_{\infty}\},$$

(resp.)

$$V_{\infty,E,m}(h) \leq c_{E,m} \quad \forall h \in \mathcal{H}_{E,0} \cap \{h \leq h_{\infty}\}.$$

Lorsque  $m \gg 1$ , alors

$$V_{\infty,m}(h) \leq c_m \quad \forall h \in \mathcal{H}_0,$$

(resp.)

$$V_{\infty,E,m}(h) \leq c_{E,m} \quad \forall h \in \mathcal{H}_{E,0}.$$

Comme application, nous montrons un résultat donnant la variation de la torsion analytique holomorphe lorsque la métrique varie sur  $\mathcal{H}_0$  (resp.  $\mathcal{H}_{E,0}$ ) :

**Théorème 1.4.** Soit  $\mathbb{P}^n$  (resp.  $X(\Sigma)$ ) une variété torique projective complexe non singulière de dimension  $n$ ) muni d'une métrique de kähler  $\omega$ .

Il existe  $m_n \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $h \in \mathcal{H}_0$  (resp.  $h \in \mathcal{H}_{E,0}$ ) et pour tout  $m \geq m_n$  :

$$-T((\mathbb{P}^n, \omega); (\mathcal{O}(m), h^m)) \leq -c'_m,$$

(resp.)

$$-T((X(\Sigma), \omega); (E^m, h^m)) \leq -c'_m,$$

où  $c'_m$  est une constante réelle qui dépend uniquement de  $m$  et de  $\omega$ .

Le paragraphe (4.1) est consacré à la comparaison entre  $V_{\infty,*}$  (définition (2.7)) et  $\mathcal{F}_{\omega_0}$  la fonctionnelle étudiée par Berman dans [3]. En particulier, on retrouve une version faible d'un résultat de [3].

La plupart des démonstrations sont données dans le cas de  $\mathbb{P}^n$ , mais elles s'étendent naturellement au cas d'une variété torique projective complexe non singulière.

## 2 Une inégalité fonctionnelle canonique sur une variété torique non-singulière

Cette section est consacrée à l'introduction d'une nouvelle fonctionnelle, notée  $V_{\infty, E, m}$ , définie sur un espace de métriques sur un fibré en droites sur variété torique non-singulière, voir la définition (2.7), et à son étude. Cette fonctionnelle a la particularité d'être canoniquement associée à la variété.

Nous commençons tout d'abord par établir qu'on peut associer canoniquement à toute variété torique complexe non singulière une forme de volume, que nous explicitons localement en terme de la combinatoire de la variété, c'est le but du théorème (2.6).

Il est bien connu, voir par exemple [6] ou [7], qu'une variété torique projective normale sur  $\mathbb{C}$ , correspond à la donnée d'un  $\mathbb{Z}$ -module libre  $N$  et un éventail  $\Sigma$  sur  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , et que tout diviseur de Cartier équivariant définit un polytope convexe dans  $M_{\mathbb{R}}$ , où  $M$  est le dual de  $N$ . Il est possible de procéder autrement en partant d'un polytope convexe à sommets entiers et de lui associer une variété torique projective normale, voir théorème (2.1) ci-dessous. Nous adopterons cette dernière construction, de sorte que toute variété torique considérée dans cet article soit attachée à un polytope convexe donné.

**Théorème 2.1.** *Soit  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  un polytope convexe d'intérieur non vide dont les sommets sont dans  $\mathbb{Z}^n$ . Il existe un unique éventail complet  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un unique diviseur de Cartier  $E$  horizontal  $T$ -invariant sur  $X(\Sigma)$  tels que :*

1.  $\Delta_E = \Delta$ .
2. Le diviseur  $E$  est ample.

*L'éventail  $\Sigma$  est le plus petit éventail complet tel que la fonction d'appui  $\psi_{\Delta}^1$  est linéaire par morceaux relativement à  $\Sigma$ . De plus,  $X(\Sigma)$  est lisse si et seulement si le polytope  $\Delta$  est absolument simple ; dans ce cas, le diviseur  $E$  est très ample.*

*Démonstration.* Voir [12, théorème 2.4.1]. □

Dans [2], Batyrev et Tschinkel introduisent un recouvrement canonique pour toute variété torique projective lisse, nous utiliserons ce recouvrement pour construire une forme de volume continue canoniquement attachée à la variété. Commençons par rappeler la construction de Batyrev et Tschinkel.

**Définition 2.2.** *[Batyrev et Tschinkel] Soit  $X(\Sigma)$ , une variété torique projective sur  $\mathbb{C}$ , définie par un éventail  $\Sigma$ . Pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , on définit  $C_{\sigma} \subset X(\Sigma)$  de la façon suivante :*

$$C_{\sigma} = \{x \in X(\Sigma) : \forall m \in \mathcal{S}_{\sigma} := \sigma \cap M, \chi^m \text{ est régulier en } x \text{ et } |\chi^m(x)| \leq 1\}.$$

**Proposition 2.3.** *Pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , on a  $C_{\sigma} \subset U_{\sigma}$  et  $C_{\sigma}$  est compact. De plus, si  $\tau, \tau' \in \Sigma$ , alors :*

$$C_{\tau} \cap C_{\tau'} = C_{\tau \cap \tau'}.$$

*Démonstration.* Voir [12, proposition 3.2.2]. □

Soit  $\{m_1, \dots, m_q\}$  une famille génératrice du semi-groupe  $\mathcal{S}_{\sigma}$ . On dispose de l'immersion fermée :

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma} : U_{\sigma} &\longrightarrow \mathbb{C}^q \\ x &\longrightarrow (\chi^{m_1}(x), \dots, \chi^{m_q}(x)). \end{aligned} \tag{1}$$

On remarque que  $\varphi(C_{\sigma}) = \varphi(U_{\sigma}) \cap B(0, 1)^q$ .

---

1.  $\psi_{\Delta}$  définit le polytope  $\Delta$ .

**Proposition 2.4.** *Si  $\Sigma$  est complet, alors les compacts  $C_\sigma$  forment un recouvrement de  $X(\Sigma)$  lorsque  $\sigma$  parcourt  $\Sigma_{\max}$ .*

*Démonstration.* [12, proposition 3.2.3]. □

**Remarque 2.5.** On suppose que  $X(\Sigma)$  est lisse, donc en particulier  $\Sigma$  est complet, dans ce cas, si on se donne  $\mu$  une forme de volume sur  $X$ , alors pour toute fonction absolument intégrable  $f$  sur  $X$ , on a

$$\int_X f \mu = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\max}} \int_{C_\sigma} f \mu,$$

car  $C_\sigma \cap C_{\sigma'} = C_{\sigma \cap \sigma'}$  est de dimension inférieure à  $\dim_{\mathbb{C}}(X(\Sigma)) - 1$ , lorsque  $\sigma \neq \sigma' \in \Sigma_{\max}$ , et donc de mesure négligeable.

Soit  $\Delta$  un polytope absolument simple, et on considère  $X(\Sigma)$ , la variété torique associée et  $E$  comme dans (2.1), donc  $X(\Sigma)$  est non-singulière et  $E$  est très ample. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 2.6.** *Il existe une unique forme volume continue sur  $X(\Sigma)$ , notée  $\omega_{E,\infty}^n$  telle que*

$$(\omega_{E,\infty}^n)|_{\text{int}(C_\sigma)} = \varphi_\sigma^*(\mu_0) \quad \forall \sigma \in \Sigma_{\max}.$$

où  $\mu_0$  désigne la forme volume standard sur  $\mathbb{C}^n$ , et  $\text{int}(\cdot)$  est l'intérieur de  $\cdot$ . En particulier, si  $\Delta = \Delta_n$ , (c'est à dire le polytope standard de  $\mathbb{R}^n$ ), donc  $X(\Sigma) = \mathbb{P}^n$ , alors on a

$$(\omega_\infty^n)|_{\{x_0 \neq 0\}} = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{\prod_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j}{\left(\max(1, |z_1|, \dots, |z_n|)\right)^{2(n+1)}},$$

avec  $z_j = \frac{x_j}{x_0}$  pour  $j = 1, \dots, n$ .

*Démonstration.* Localement sur un ouvert assez petit  $U$ , on a  $\omega_{E,\infty}^n = f \prod_{j=1}^n dy_j \wedge d\bar{y}_j$  où  $y_1, \dots, y_n$  est un système local de coordonnées sur  $U$  et  $f$  est une fonction positive et continue sur  $U$ . Donc l'unicité résultera du (1.).

On fera la preuve pour  $\Delta = \Delta_n$ , c'est à dire  $X(\Sigma) = \mathbb{P}^n$ . Notons par  $x_0, \dots, x_n$  les coordonnées homogènes standards de  $\mathbb{P}^n$ , et posons sur l'ouvert  $\{x_0 \neq 0\}$ ,  $z_j = \frac{x_j}{x_0}$  pour  $j = 1, \dots, n$ .

On considère la forme de volume  $\omega_\infty^n$  sur  $\mathbb{P}^n$ , donnée sur  $\{x_0 \neq 0\}$  par

$$(\omega_\infty^n)|_{\{x_0 \neq 0\}} = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{\prod_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j}{\left(\max(1, |z_1|, \dots, |z_n|)\right)^{2(n+1)}}.$$

Notons que cette dernière condition détermine de façon unique  $\omega_\infty^n$ .  $\mathbb{P}^n$  est défini par la donnée d'un  $\mathbb{Z}$ -module  $N$ , libre de rang  $n$  et d'un éventail  $\Sigma_{\mathbb{P}^n}$  (voir par exemple, [7, § 1.4]. On note par  $M$ , le  $\mathbb{Z}$ -module dual à  $N$ , on les identifie à  $\mathbb{Z}^n$ . On note par  $e_1, \dots, e_n$  la base standard de  $\mathbb{Z}^n$ , et  $e_0 := -\sum_{j=1}^n e_j$ . On pose,

$$\sigma_j := \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \mathbb{R}^+ e_k \quad \forall j = 0, \dots, n,$$

alors  $\Sigma_{\mathbb{P}^n, \max} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ . Vérifions que

$$\mathcal{S}_j := \check{\sigma}_j \cap M = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mathbb{Z}^+(e_k^* - e_j^*) + \mathbb{Z}^+(-e_j^*), \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_0 := \check{\sigma}_0 \cap M = \sum_{k=1}^n \mathbb{Z}^+e_k^*.$$

où  $e_j^*$  est le dual de  $e_j$ , pour  $j = 1, \dots, n$ .

Soit donc  $j \neq 0$ , si  $m = \sum_{k=1}^n m_k e_k^* \in \check{\sigma}_j$ , alors

$$\begin{aligned} \langle m, e_k \rangle &= m_k \geq 0 \quad \forall k \notin \{0, j\}, \\ \langle m, e_0 \rangle &= -\sum_{k=1}^n m_k \geq 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} m &= \sum_{k=1}^n m_k e_k^* \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n m_k (e_k^* - e_j^*) + \left(-\sum_{k=1}^n m_k\right)(-e_j^*) \in \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mathbb{Z}^+(e_k^* - e_j^*) + \mathbb{Z}^+(-e_j^*). \end{aligned}$$

Alors,  $\check{\sigma}_j \cap M \subseteq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mathbb{Z}^+(e_k^* - e_j^*) + \mathbb{Z}^+(-e_j^*)$ .

Réciproquement si  $m \in \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mathbb{Z}^+(e_k^* - e_j^*) + \mathbb{Z}^+(-e_j^*)$ , alors  $m$  peut s'écrire comme suit :

$$m = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n z_k (e_k^* - e_j^*) + z_j (-e_j^*)$$

avec  $z_k \in \mathbb{Z}^+$  pour  $k \geq 1$ . On a alors

$$\begin{aligned} \langle m, e_k \rangle &= z_k \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall k \geq 1, k \neq j, \\ \langle m, e_0 \rangle &= z_j \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Par suite,  $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mathbb{Z}^+(e_k^* - e_j^*) + \mathbb{Z}^+(-e_j^*) \subseteq \check{\sigma}_j \cap M$ .

Maintenant si  $j = 0$ , alors on vérifie que  $\check{\sigma}_0 = \sum_{k=1}^n \mathbb{Z}^+e_k^*$ .

Comme dans (1), on considère pour tout  $j = 1, \dots, n$  :

$$\begin{aligned} \varphi_j : U_{\sigma_j} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longrightarrow (\chi^{e_1^* - e_j^*}(x), \dots, \chi^{e_{j-1}^* - e_j^*}(x), \chi^{-e_j^*}(x), \chi^{e_{j+1}^* - e_j^*}(x), \dots, \chi^{e_n^* - e_j^*}(x)). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_0 : U_{\sigma_0} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longrightarrow (\chi^{e_1^*}(x), \dots, \chi^{e_n^*}(x)). \end{aligned}$$

En passant aux coordonnées  $z_1, \dots, z_n$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\varphi_j : U_{\sigma_j} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\longrightarrow \left( \frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{1}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_0 : U_{\sigma_0} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\longrightarrow (z_1, \dots, z_n).\end{aligned}$$

Rappelons que lorsque  $\mathbb{C}^n$  est muni de sa métrique standard, alors la forme volume associée,  $\mu_0$  est donnée par :

$$\mu_0 = \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \prod_{k=1}^n dy_k \wedge d\bar{y}_k$$

où  $\{y_1, \dots, y_n\}$  est un système local de coordonnées holomorphes sur  $\mathbb{C}^n$ .

Fixons  $j \neq 0$  et posons  $y_k = \frac{z_k}{z_j}$  si  $k \neq j$  et  $y_j = \frac{1}{z_j}$ . Montrons que :

$$\omega_{\infty|_{\text{int}(C_j)}}^n = \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \varphi_j^* \left( \prod_{k=1}^n dy_k \wedge d\bar{y}_k \right).$$

En effet, sur l'intérieur de  $C_j$ , on a

$$\begin{aligned}(\varphi_j^{-1})^* \omega_{\infty}^n &= \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n (\varphi_j^{-1})^* \left( \frac{\prod_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k}{(\max(1, |z_1|, \dots, |z_n|))^{2(n+1)}} \right) \\ &= \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \frac{d(\frac{1}{y_j}) \wedge d(\frac{1}{y_j}) \prod_{k \neq j}^n d(\frac{y_k}{y_j}) \wedge d(\frac{\bar{y}_k}{y_j})}{\max\left(1, \left|\frac{y_1}{y_j}\right|, \dots, \left|\frac{y_{j-1}}{y_j}\right|, \left|\frac{1}{y_j}\right|, \left|\frac{y_{j+1}}{y_j}\right|, \dots, \left|\frac{y_n}{y_j}\right|\right)^{2(n+1)}} \\ &= \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \frac{|y_j|^{-2(n+1)} \prod_{k=1}^n dy_k \wedge d\bar{y}_k}{\max\left(1, \left|\frac{y_1}{y_j}\right|, \dots, \left|\frac{y_{j-1}}{y_j}\right|, \left|\frac{1}{y_j}\right|, \left|\frac{y_{j+1}}{y_j}\right|, \dots, \left|\frac{y_n}{y_j}\right|\right)^{2(n+1)}} \\ &= \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \frac{\prod_{k=1}^n dy_k \wedge d\bar{y}_k}{\max(1, |y_1|, \dots, |y_n|)^{2(n+1)}} \\ &= \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \prod_{k=1}^n dy_k \wedge d\bar{y}_k.\end{aligned}$$

Sur  $C_0$ , on a pose  $y_k = z_k$  pour  $k = 1, \dots, n$ , alors

$$\omega_{\infty|_{\text{int}(C_0)}}^n = \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \varphi_0^* \left( \prod_{k=1}^n dy_k \wedge d\bar{y}_k \right).$$

□

## 2.1 La fonctionnelle $V_{\infty,*}$

On considère  $\Delta_n$  le polytope standard dans  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\Delta$  un polytope absolument simple). Soit  $\mathbb{P}^n$  (resp.  $X(\Sigma)$ ) l'espace projectif complexe de dimension  $n$  associé à  $\Delta_n$  (resp. la variété torique projective complexe non singulière associée à  $\Delta$ ) comme dans (2.1). On considère la forme volume singulière  $\omega_\infty^n$  (resp.  $\omega_{E,\infty}^n$ ) sur  $\mathbb{P}^n$  (resp. sur  $X(\Sigma)$ ).

Soit  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . On dispose pour chaque métrique hermitienne continue  $h$  sur  $\mathcal{O}(1)$  (resp. sur  $E$ ), de deux normes sur  $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m))$  (resp. sur  $A^{(0,0)}(X(\Sigma), E^{\otimes m})$ ) :

1. La première norme notée par  $\|\cdot\|_{L_{h^m,\infty}^2}$  (resp.  $\|\cdot\|_{L_{h^m,\infty}^2}$ ) est associée au produit hermitien suivant :

$$\langle s, t \rangle_{L_{h^m,\infty}^2} = \int_{\mathbb{P}^n} (h^m)(s, t) \omega_\infty^n \quad \forall s, t \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)),$$

(resp.)

$$\langle s, t \rangle_{L_{h^m,\infty}^2} = \int_{X(\Sigma)} (h^m)(s, t) \omega_{E,\infty}^n \quad \forall s, t \in A^{(0,0)}(X(\Sigma), E^m),$$

et on notera par  $h_{L^2,h^m,\infty}$  (resp.  $h_{L^2,h^m,\infty_E}$ ) la norme hermitienne induite sur l'espace  $\det H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m))$  (resp.  $\det H^0(X(\Sigma), E^m)$ ).

2. La deuxième norme notée  $\|\cdot\|_{\sup}$  (resp.  $\|\cdot\|_{E,\sup}$ ), est définie comme suit :

$$\|s\|_{\sup} = \sup_{x \in \mathbb{P}^n} \|s(x)\|^{\otimes m} \quad \forall s \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)).$$

(resp.)

$$\|s\|_{E,\sup} = \sup_{x \in X(\Sigma)} \|s(x)\|^{\otimes m} \quad \forall s \in A^{(0,0)}(X(\Sigma), E^m).$$

Rappelons qu'une métrique  $h$  sur  $E$  est dite admissible, si  $h$  est une limite uniforme d'une suite de métriques positives et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

On note par  $\mathcal{H}_0$  (resp.  $\mathcal{H}_{E,0}$ ), l'espace des métriques sur  $\mathcal{O}(1)$  (resp.  $E$ ) de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , admissibles et invariantes par l'action du tore compact de  $\mathbb{P}^n$  (resp. de  $X(\Sigma)$ ). On introduit la définition suivante :

**Définition 2.7.** Soit  $X(\Sigma)$  une variété torique projective complexe non singulière. Pour tout  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , on définit une fonctionnelle sur  $\mathcal{H}_{E,0}$  en posant pour tout  $h \in \mathcal{H}_{E,0}$  :

$$V_{\infty,E,m}(h) := \log h_{L^2,h^m,\infty_E} + 2 \int_{X(\Sigma)} \tilde{\text{ch}}(E^m, h^m, h_\infty^m),$$

où  $\tilde{\text{ch}}(E^m, h^m, h_\infty^m)$  est la classe de Bott-Chern généralisée<sup>2</sup> associée à la suite exacte  $0 \rightarrow (E^m, h^m) \rightarrow (E^m, h_\infty^m) \rightarrow 0$  et au caractère  $\text{ch}$ .

### Remarque 2.8.

1. Contrairement à la fonctionnelle  $\mathcal{F}_{\omega_0}$  introduite dans [3], voir (12), la fonctionnelle  $V_{\infty,E,m}$  n'est pas invariante par multiplication par des constantes strictement positives. Plus précisément, si  $t > 0$  on a

$$V_{\infty,E,m}(th) = \left( \binom{n+m}{n} - 2 \frac{m^{n+1}}{n!} \right) \log(t) + V_{\infty,E,m}(h) \quad \forall h \in \mathcal{H}_0.$$

---

2. C'est à dire une forme différentielle généralisée, voir [12, §4.3]



2.  $V_{\infty, E, m}$  ne dépend pas à priori d'un choix de métrique kählérienne sur  $X(\Sigma)$  ; ce qui n'est pas le cas de  $\mathcal{F}_{\omega_0}$ .

Dans la suite, on suppose que  $\Delta = \Delta_n$  c'est à dire on se restreindra au cas de  $\mathbb{P}^n$ .

On se propose d'étudier la fonctionnelle  $V_{\infty, m}$ . Pour cela, on va traduire cette étude en un problème de la géométrie convexe sur  $\mathbb{R}^n$ , par l'intermédiaire de la correspondance suivante : Soit  $h \in \mathcal{H}_0$ , on lui associe la fonction suivante :

$$f_h(u) = \log \|\cdot\|(\exp(-u)) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

où  $\exp(\cdot)$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ u = (u_1, \dots, u_n) &\longrightarrow \exp(-u) := [1 : \exp(-u_1), \dots, \exp(-u_n)]. \end{aligned}$$

Rappelons que cette fonction a été introduite par Burgos, Philippon et Sombra dans [5] afin d'étudier les hauteurs des variétés toriques projectives. On montre, voir [5], que  $h \mapsto f_h$  définit une correspondance bijective entre les éléments de  $\mathcal{H}_0$  et une classe de fonctions concaves de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

On appelle la transformée de Legendre-Fenchel de  $f_h$ , la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \check{f}_h(x) &= \inf_{u \in \mathbb{R}^n} (\langle x, u \rangle - f_h(u)) \quad \text{si } x \in \Delta_n, \\ \check{f}_h(x) &= -\infty \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Comme  $h$  est invariante par  $(\mathbb{S}^1)^n$  alors

$$h_{L^2, h^m, \infty} = \prod_{\nu \in \mathcal{P}_m} \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2},$$

où  $\mathcal{P}_m = \{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^n \nu_j \leq m\}$  et  $\{z^\nu \mid \nu \in \mathcal{P}_m\}$  est une base de  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m))$  formée par les monômes de degré inférieur à  $m$ .

Le résultat suivant sera utile dans la suite :

**Théorème 2.9.** *Soit  $\mathbb{P}^n$  l'espace projectif de dimension  $n$  (resp.  $X(\Sigma)$  une variété torique projective non-singulière) sur  $\mathbb{C}$ .  $\overline{\mathcal{O}(1)} = (\mathcal{O}(1), h)$  (resp.  $\overline{E} = (E, h)$ ) le fibré de Serre (resp. un fibré en droites équivariant) muni d'une métrique  $h$ , positive et invariante par l'action du tore compact de  $\mathbb{P}^n$  (resp.  $X(\Sigma)$ ). On a*

$$\int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) = \int_{\Delta_n} \check{f}_h$$

(resp.)

$$\int_X \tilde{\text{ch}}(E, h, h_\infty) = \int_{\Delta} \check{f}_h.$$

où  $h_\infty$  est la métrique canonique sur  $\mathcal{O}(1)$  (resp. sur  $E$ ).

*Démonstration.* See [13, § 9.3]. □

Pour tout  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$  tel que  $\sum_{k=1}^n \nu_k \leq m$ , on considère l'ensemble :

$$\Delta_{n, \nu} = \left\{ x \in \Delta_n \mid \frac{\nu_j}{m} \leq x_j < \frac{\nu_j + 1}{m} \quad \forall j = 1, \dots, n \right\}.$$

On vérifie que la famille formée par ces ensembles forme une partition de  $\Delta_n$ . On considère les polynômes  $R_\nu$  suivants :

$$R_\nu(x) = \left(1 - \sum_{k=1}^n \nu_k + m \sum_{k=1}^n x_k\right) \prod_{k=1}^n (1 + \nu_k - mx_k).$$

On notera par  $\psi$  la fonction définie sur l'ouvert  $\{x_0 \neq 0\}$  par :

$$\psi(z) = \frac{1}{2} \log h(1, 1).$$

Dans ce cas  $h(z^\nu, z^\nu) = |z|^{2\nu} e^{2m\psi(z)}$  sur  $\{x_0 \neq 0\}$  et que  $f_h(u) = \psi(\exp(u))$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 2.10.** *Soit  $h \in \mathcal{H}_0$ . On a*

$$\log \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2} \leq -2m \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n, \nu})} \int_{\Delta_{n, \nu}} \check{f}_h(x) dx - \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n, \nu})} \int_{\Delta_{n, \nu}} \log R_\nu(x) dx + \log(n+1), \quad (2)$$

pour tout  $h \in \mathcal{H}_0$ ,  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  et  $\nu \in \mathcal{P}_m$ . Le terme à droite est fini.

*Démonstration.* Fixons  $\nu$  comme avant et soit  $x \in \Delta_{n, \nu}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2} &= \sum_{\sigma \in \Sigma_{\max}} \int_{C_\sigma} h^{\otimes m}(z^\nu, z^\nu) \omega_\infty^n \quad \text{d'après (2.5)} \\ &= \sum_{j=0}^n \int_{C_j} h^{\otimes m}(z^\nu, z^\nu) \omega_\infty^n \\ &= \sum_{j=0}^n \int_{C_j} |z|^{2\nu} e^{2m\psi(z)} \omega_\infty^n \\ &= \sum_{j=0}^n \int_{C_j} |z|^{2\nu-2mx} |z|^{2mx} e^{2m\psi(z)} \omega_\infty^n \\ &\leq \sum_{j=0}^n \sup_{z \in C_j} \left( |z|^{2mx} e^{2m\psi(z)} \right) \int_{C_j} |z|^{2\nu-2mx} \omega_\infty^n \\ &\leq \sum_{j=0}^n \sup_{z \in \mathbb{P}^n} \left( |z|^{2mx} e^{2m\psi(z)} \right) \int_{C_j} |z|^{2\nu-2mx} \omega_\infty^n \\ &= \sum_{j=0}^n \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \left( e^{(-2\langle mx, u \rangle + 2mf(u))} \right) \int_{C_j} |z|^{2\nu-2mx} \omega_\infty^n \\ &= \sum_{j=0}^n e^{-2m \inf_{u \in \mathbb{R}^n} (\langle x, u \rangle - f(u))} \int_{C_j} |z|^{2\nu-2mx} \omega_\infty^n \\ &= \sum_{j=0}^n e^{-2m \check{f}_h(x)} \int_{C_j} |z|^{2\nu-2mx} \omega_\infty^n \\ &= \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n e^{-2m \check{f}_h(x)} \int_{C_0} |z|^{2\nu-2mx} \prod_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j + \sum_{j=1}^n e^{-2m \check{f}_h(x)} \int_{C_j} |z|^{2\nu-2mx} \omega_\infty^n. \end{aligned}$$

Calculons les intégrales qui figurent dans la dernière ligne : Si  $j \neq 0$ , en utilisant les changements de variables évidents, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{C_j} |z|^{2\nu-2mx} \omega_\infty^n &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{C_j} \prod_{k=1}^n |z_k|^{2\nu_k-2mx_k} \omega_\infty^n \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{D^n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left|\frac{y_k}{y_j}\right|^{2\nu_k-2mx_k} \left|\frac{1}{y_j}\right|^{2\nu_j-2mx_j} \prod_{k=1}^n dy_k \wedge d\bar{y}_k \\
&= \int_{[0,1]^n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n r_k^{\nu_k-mx_k} r_j^{(-\sum_{k=1}^n \nu_k + m \sum_{k=1}^n x_k)} \prod_{k=1}^n dr_k \\
&= \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n \nu_k + m \sum_{k=1}^n x_k} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(1 + \nu_k - mx_k)}.
\end{aligned}$$

Pour  $j = 0$ , on obtient :

$$\int_{C_0} |z|^{2\nu-2mx} \omega_\infty^n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \nu_k - mx_k)}$$

Notons que comme  $x \in \Delta_{n,\nu}$ , alors toutes ces intégrales sont convergentes.

Donc,

$$\begin{aligned}
\langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2} &\leq e^{-2m\check{f}_h(x)} \left( \prod_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \nu_k - mx_k)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n \nu_k + m \sum_{k=1}^n x_k} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(1 + \nu_k - mx_k)} \right) \\
&= e^{-2m\check{f}_h(x)} \frac{n+1}{1 - \sum_{k=1}^n \nu_k + m \sum_{k=1}^n x_k} \prod_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \nu_k - mx_k)}.
\end{aligned}$$

Récapitulons, en posant  $R_\nu(x) = (1 - \sum_{k=1}^n \nu_k + m \sum_{k=1}^n x_k) \prod_{k=1}^n (1 + \nu_k - mx_k)$ , on a montré que

$$\log \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2} \leq -2m\check{f}_h(x) + \log(n+1) - \log R_\nu(x), \quad (3)$$

pour tout  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$  avec  $\sum_{j=1}^n \nu_j \leq m$  et  $x \in \Delta_{n,\nu}$ .

Par définition de  $R_\nu$ , on vérifie que  $\log R_\nu$  est absolument intégrable sur  $\prod_{j=1}^n [\frac{\nu_j}{m}, \frac{\nu_j+1}{m}]$ , et donc sur  $\Delta_{n,\nu} \subset \prod_{j=1}^n [\frac{\nu_j}{m}, \frac{\nu_j+1}{m}]$ .

De (3) et en intégrant sur  $\Delta_{n,\nu}$ , on obtient :

$$\log \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2} \leq -2m \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n,\nu})} \int_{\Delta_{n,\nu}} \check{f}_h(x) dx - \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n,\nu})} \int_{\Delta_{n,\nu}} \log R_\nu(x) dx + \log(n+1).$$

□

**Remarque 2.11.** Même si  $V_{\infty,m}$  n'est pas invariante (voir (2.8)), on note que si l'on multiplie  $h$  par  $t > 0$ , alors on a,

$$-2m\check{f}_h(x) - \log \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2} = -2m\check{f}_{th}(x) - \log \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{th^m, \infty}^2} \quad \forall t > 0. \quad (4)$$

**Théorème 2.12.** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , il existe une constante  $c_m$  qui dépend uniquement de  $m$  telle que*

$$V_{\infty,m}(h) \leq c_m \quad \forall h \in \mathcal{H}_0 \cap \{h \leq h_\infty\}. \quad (5)$$

*Lorsque  $m \gg 1$ , alors*

$$V_{\infty,m}(h) \leq c_m \quad \forall h \in \mathcal{H}_0. \quad (6)$$

*Démonstration.* Commençons par montrer que la deuxième assertion découle de la première. En effet, on a pour tout  $h \in \mathcal{H}_0$  et  $t > 0$  fixé :

$$\begin{aligned} V_{\infty,m}(h) &= V_{\infty,m}(t^{-1}th) \\ &= -\binom{n+m}{n} \log t + 2 \frac{m^{n+1}}{n!} \log t + V_{\infty,m}(th) \\ &= \left( \binom{n+m}{n} - 2 \frac{m^{n+1}}{n!} \right) (-\log t) + V_{\infty,m}(th). \end{aligned}$$

Comme  $\binom{n+m}{n}$  est un polynôme de degré  $n$  en  $m$ , alors on peut trouver  $m \gg 1$  qui ne dépend pas de  $h$  tel que :

$$V_{\infty,m}(h) \leq V_{\infty,m}(th) \quad \forall 0 < t < 1.$$

Par compacité de  $\mathbb{P}^n$ , on peut trouver  $0 < t_0 < 1$  tel que  $t_0 h \leq h_\infty$ . Donc (6) découle de (5).

Soit  $h \in \mathcal{H}_0$  tel que  $h \leq h_\infty$  et montrons (5). On a,

$$\check{f}_h(x) \geq \check{f}_{h_\infty}(x) \quad \forall x \in \Delta_n.$$

Or, on peut vérifier que  $\check{f}_{h_\infty}(x) = 0$  pour tout  $x \in \Delta_n$ . Donc,

$$\check{f}_h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Delta_n \quad \forall h \in \mathcal{H}_0 \quad \forall h \leq h_\infty.$$

Notons que  $\Delta_{n,\nu} \subset \prod_{j=1}^n [\frac{\nu_j}{m}, \frac{\nu_j+1}{m}]$ , alors  $\text{Vol}(\Delta_{n,\nu}) \leq \frac{1}{m^n}$ <sup>3</sup>. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m} \log \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2} &\leq -2m \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n,\nu})} \int_{\Delta_{n,\nu}} \check{f}_h(x) dx - \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n,\nu})} \int_{\Delta_{n,\nu}} \log R_\nu(x) dx \\ &\quad + \binom{n+m}{n} \log(n+1) \quad \text{d'après (2.10)} \\ &= -2m \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m} \frac{\text{Vol}(\Delta_n)}{\text{Vol}(\Delta_{n,\nu})} \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_n)} \int_{\Delta_{n,\nu}} \check{f}_h(x) dx - \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n,\nu})} \int_{\Delta_{n,\nu}} \log R_\nu(x) dx \\ &\quad + \binom{n+m}{n} \log(n+1) \\ &\leq -2m \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m} \frac{m^n}{n!} \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_n)} \int_{\Delta_{n,\nu}} \check{f}_h(x) dx - \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n,\nu})} \int_{\Delta_{n,\nu}} \log R_\nu(x) dx \\ &\quad + \binom{n+m}{n} \log(n+1) \\ &= -2m^{n+1} \int_{\Delta_n} \check{f}_h(x) dx - \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n,\nu})} \int_{\Delta_{n,\nu}} \log R_\nu(x) dx \end{aligned}$$

---

3. On a choisi une mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ , vérifiant  $\text{Vol}([0, 1]^n) = 1$

$$+ \binom{n+m}{n} \log(n+1).$$

Récapitulons, nous venons d'établir l'inégalité suivante :

$$\log h_{L^2, h^m, \infty} + 2m^{n+1} \int_{\Delta_n} \check{f}_h(x) dx \leq - \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n, \nu})} \int_{\Delta_{n, \nu}} \log R_\nu(x) dx + \binom{n+m}{n} \log(n+1).$$

Mais d'après (2.9), on a

$$\int_{\Delta_n} \check{f}_h(x) dx = \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty).$$

Si l'on pose

$$c_m := - \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{\text{Vol}(\Delta_{n, \nu})} \int_{\Delta_{n, \nu}} \log R_\nu(x) dx + \binom{n+m}{n} \log(n+1),$$

alors on conclut que,

$$V_{\infty, m}(h) = \log h_{L^2, h^m, \infty} + 2 \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) \leq c_m, \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall h \in \mathcal{H}_0 \cap \{h \leq h_\infty\}.$$

□

Soit  $X$  une variété torique non-singulière. On fixe  $\omega_0 = c_1(E, h_0)$  une forme de Chern positive dans la classe  $c_1(E)$ , avec  $h_0$  invariante par l'action du tore compact. Soit  $h \in \mathcal{H}_0$ . Soit  $u := -\log \frac{h}{h_0}$ . On pose :

$$P_{\omega_0}[u](x) = \sup\{v(x) \mid v \in \mathcal{H}_{\omega_0}, v \leq u\} \quad \forall x \in X.$$

On note par  $P[h]$  la métrique donnée par  $h_0 e^{-P_{\omega_0}[u]}$ .

**Lemme 2.13.** *Si  $h \in \mathcal{H}_0$ , alors  $P[h] \geq h$  et  $P[h] \in \mathcal{H}_{E, 0}$ .*

*Démonstration.* Pour la positivité de  $P[h]$  on peut consulter [3, §1.4]. Soit  $\theta \in (\mathbb{S}^1)^n$  le tore compact de  $X(\Sigma)$ . On note par  $\theta \cdot x$ , l'action de  $\theta$  sur un point  $x$  de  $X(\Sigma)$ . Par définition, on a  $P[u](\theta \cdot x) \geq v(\theta \cdot x)$ , si  $v \leq u$  et  $v \in \mathcal{H}_{\omega_0}$ . Supposons que  $v \in \mathcal{H}_{\omega_0}$ ,  $v \leq u$  et posons  $v_\theta$  la fonction définie par  $v_\theta(x) = v(\theta \cdot x)$  pour tout  $x \in X(\Sigma)$ . Il est clair que  $v_\theta \in \mathcal{H}_{\omega_0}$ .

On a  $v_\theta(x) = v(\theta \cdot x) \leq u(\theta \cdot x) = u(x)$  ( $u$  est invariante par l'action du tore compact). Donc,  $P[u](x) \geq v_\theta(x)$ . Par suite,  $P[u](x) \geq P[u](\theta \cdot x) \forall \theta \in (\mathbb{S}^1)^n$ . On déduit que

$$P[u](\theta \cdot x) = P[u](x) \quad \forall \theta \in (\mathbb{S}^1)^n.$$

Par suite,  $P[h] \in \mathcal{H}_{E, 0}$ .

□

Lorsque  $X = \mathbb{P}^1$ , alors on peut établir comme dans [3, § 3.3] :

$$V_{\infty, m}(h) \leq V_{\infty, m}(P[h]),$$

pour toute métrique  $h$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et invariante par l'action de  $\mathbb{S}^1$ . En effet, en suivant [3, 3.3], on obtient :

$$\int_{\mathbb{P}^1} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) \leq \int_{\mathbb{P}^1} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), P[h], h_\infty),$$

donc,

$$\begin{aligned} V_{\infty, m}(h) &= \log h_{L^2, h^m, \infty} + 2 \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) \\ &\leq \log h_{L^2, (P[h])^m, \infty} + 2 \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), (P[h])^m, h_\infty^m) \\ &= V_{\infty, m}(P[h]). \end{aligned}$$

### 3 Applications à la torsion analytique holomorphe

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement de la torsion analytique holomorphe lorsque la métrique varie dans  $\mathcal{H}_0$ . Cette étude est motivée par une conjecture de Gillet et Soulé qui prédit que le déterminant régularisé vu comme fonction en la métrique est borné supérieurement, voir [8].

#### 3.1 Rappels

Soit  $X$  variété projective complexe non singulière de dimension  $n$  et  $h_X$  une métrique  $\mathcal{C}^\infty$  hermitienne sur  $TX$  et  $\omega$  sa forme de Kähler associée. On considère pour tout  $q = 0, \dots, n$ , l'opérateur de Kodaira  $\Delta_q$ , agissant sur  $A^{(0,q)}(X, E)$  et on note par  $\zeta_{\Delta_q}$  sa fonction Zêta. On sait que  $\zeta_q$  s'étend méromorphiquement au plan complexe et holomorphiquement au voisinage de zéro. On définit alors le déterminant régularisé par :

$$\det(\Delta_q) := \exp(-\zeta'_{\Delta_q}(0)),$$

Rappelons leur construction et l'énoncé de la conjecture : Pour tout  $q \geq 0$ , les espaces :

$$B^q = \bar{\partial}(A^{0,q-1}(X, E)) \subset A^{0,q}(X, E) \quad q \geq 1.$$

$B^0 = 0$ , et la fonction Zêta

$$\zeta_{B^q}(0) = \text{Tr}(\Delta_q^{-s}|B^q) \quad \text{Re}(s) > n.$$

et on a,

$$\zeta_{\Delta_q}(s) = \zeta_{B^q}(s) + \zeta_{B^{q+1}}(s),$$

et

$$\zeta_{B^{q+1}}(s) = \zeta_{\Delta_q}(s) - \zeta_{\Delta_{q-1}}(s) + \zeta_{\Delta_{q+2}}(s) + \dots + (-1)^q \zeta_{\Delta_0}(s).$$

On définit :

$$D_q(E, h) = \exp(-\zeta'_{B^q}(0)).$$

Dans [8], Gillet et Soulé énoncent la conjecture suivante :

**Conjecture 3.1.** *Il existe une constante  $C_q(E)$  telle que, pour tout choix de métrique sur  $E$ , on a*

$$D_q(E, h) \leq C_q(E) \quad \forall q \geq 1.$$

**Remarque 3.2.**

1.  $D_q(E, h) = D_q(E, th)$  pour tout réel  $t > 0$ .
2. On a  $D_q(\check{E}, \check{h}) = D_{n+1-q}(E, h)$ , où  $\check{E} = E^* \otimes K_X$  et  $\check{h}$  est la métrique sur  $\check{E}$  induite par  $h$  et  $h_X$ .

Rappelons que la torsion analytique holomorphe pour  $(X, h_X)$  et  $(E, h)$  est par définition :

$$T((X, \omega); (E, h)) = \sum_{q=0}^n (-1)^{q+1} q \zeta'_{\Delta_q}(0).$$

On appelle métrique de Quillen sur le déterminant de cohomologie,  $\lambda(E)$  la métrique suivante :

$$h_{Q, h, \omega} = h_{L^2, h, \omega} e^{T((X, \omega); (E, h))},$$

où  $h_{L^2, h, \omega}$  est la métrique  $L^2$  induite par  $h$  et  $\omega$ .

On a,

$$\begin{aligned}
T((X, h_X); (E, h)) &= \sum_{q=0}^n (-1)^{q+1} q (\zeta'_{B^q}(0) + \zeta'_{B^{q+1}}(0)) \\
&= \sum_{q=0}^n (-1)^{q+1} q \zeta'_{B^q}(0) + \sum_{q=0}^n (-1)^{q+1} (q+1) \zeta'_{B^{q+1}}(0) - \sum_{q=0}^n (-1)^{q+1} \zeta'_{B^{q+1}}(0) \\
&= \sum_{q=0}^n (-1)^{q+1} q \zeta'_{B^q}(0) + \sum_{q=1}^n (-1)^{q+2} q \zeta'_{B^q}(0) - \sum_{q=1}^n (-1)^q \zeta'_{B^q}(0) \quad (\text{on a } B^0 = 0, B^{n+1} = 0) \\
&= - \sum_{q=1}^n (-1)^q \zeta'_{B^q}(0).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\exp\left(-T((X, h_X); (E, h))\right) = \prod_{q=1}^n D_q(E, h)^{(-1)^{q+1}}.$$

En particulier si  $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ , alors

$$\exp\left(-T((X, h_X); (E, h))\right) = D_1(E, h). \quad (7)$$

### 3.2 Sur la variation de la torsion analytique holomorphe

**Théorème 3.3.** *Soit  $\mathbb{P}^n$  (resp.  $X(\Sigma)$ ) une variété torique projective complexe non singulière de dimension  $n$ ) muni d'une métrique de kähler  $\omega$ . Il existe  $m_n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,*

$$-T((\mathbb{P}^n, \omega); (\mathcal{O}(m), h^m)) \leq -c'_m \quad \forall m \in \mathbb{N}_{\geq m_n} \quad \forall h \in \mathcal{H}_0,$$

(resp.)

$$-T((X(\Sigma), \omega); (E^m, h^m)) \leq -c'_m \quad \forall m \in \mathbb{N}_{\geq m_n} \quad \forall h \in \mathcal{H}_0,$$

où  $c'_m$  est une constante réelle qui dépend uniquement de  $m$  et de  $\omega$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas  $\omega = \omega_{FS}$ . Soit  $\omega$  une forme kählérienne  $\mathcal{C}^\infty$  quelconque sur  $T\mathbb{P}^n$  et  $h_{\mathbb{P}^n}$  la métrique hermitienne associée. Considérons un représentant pour de la classe de Bott-Chern  $\widetilde{Td}(T\mathbb{P}^n, h_{\mathbb{P}^n}, h_{\mathbb{P}^n, FS})$ . Comme  $\omega_{FS}$  est strictement positive et par compacité de  $\mathbb{P}^n$ , il existe  $P$ , un polynôme en  $\omega_{FS}$ , tel que

$$0 \leq \widetilde{Td}(T\mathbb{P}^n, h_{\mathbb{P}^n}, h_{\mathbb{P}^n, FS}) + P(\omega_{FS}) \leq 2P(\omega_{FS}),$$

dans  $A(\mathbb{P}^n)$ ; l'algèbre des formes  $(*, *)$ -formes différentielles sur  $\mathbb{P}^n$ .

On suppose en premier temps que  $h$  est une métrique positive et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{O}(1)$ . Comme  $c_1((\mathcal{O}(1), h)) \geq 0$  par hypothèse, et que  $\text{ch}$  est une série à coefficients positifs, alors

$$0 \leq \text{ch}(\mathcal{O}(m), h^m) \widetilde{Td}(T\mathbb{P}^n, h_{\mathbb{P}^n}, h_{\mathbb{P}^n, FS}) + \text{ch}(\mathcal{O}(m), h^m) P(\omega_{FS}) \leq 2 \text{ch}(\mathcal{O}(m), h^m) P(\omega_{FS}).$$

Par suite,

$$- \int_{\mathbb{P}^n} \text{ch}(\mathcal{O}(m), h^m) P(\omega_{FS}) \leq \int_{\mathbb{P}^n} \text{ch}(\mathcal{O}(m), h^m) \widetilde{Td}(T\mathbb{P}^n, h_{\mathbb{P}^n}, h_{\mathbb{P}^n, FS}) \leq \int_{\mathbb{P}^n} \text{ch}(\mathcal{O}(m), h^m) P(\omega_{FS}).$$

Or, d'après [4], on dispose d'une formule donnant la variation de la métrique de Quillen lorsqu'on change la métrique sur  $T\mathbb{P}^n$  (resp. sur  $TX(\Sigma)$ ) :

$$-\log \frac{h_{Q,h^m,\omega}}{h_{Q,h^m,\omega_{FS}}} = \int_{\mathbb{P}^n} \text{ch}(\mathcal{O}(m), h^m) \widetilde{Td}(T\mathbb{P}^n, h_{\mathbb{P}^n}, h_{\mathbb{P}^n,FS}).$$

Par suite, pour toute métrique positive et de classe  $\mathcal{C}^\infty$   $h$  sur  $\mathcal{O}(1)$ , on a :

$$-\int_{\mathbb{P}^n} \text{ch}(\mathcal{O}(m), h^m) P(\omega_{FS}) \leq -\log \frac{h_{Q,h^m,\omega_{FS}}}{h_{Q,h^m,\omega}} \leq \int_{\mathbb{P}^n} \text{ch}(\mathcal{O}(m), h^m) P(\omega_{FS}).$$

Comme  $\int_{\mathbb{P}^n} P(\omega_{FS}) \text{ch}((\mathcal{O}(m), h^m))$  ne dépend pas de  $h$ , alors on peut supposer dans la suite que  $\omega = \omega_{FS}$ .

On munit  $\mathbb{P}^n$  de la forme de Fubini-Study,  $\omega_{FS}$ . Soit  $h$  une métrique positive de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et invariante par l'action du tore compact  $(\mathbb{S}^1)^n$  sur  $\mathcal{O}(1)$ . Comme  $T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), (th)^m)) = T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h^m))$ , où  $t > 0$  fixé. Alors, on peut supposer que  $h$  vérifie :

$$h \leq h_{FS} (\leq h_\infty),$$

On en déduit que,  $\omega_{FS}^n \leq \omega_\infty^n$  et donc :

$$h_{L^2, h^m, \omega_{FS}} \leq h_{L^2, h^m, \omega_\infty}. \quad (8)$$

On a

$$-\log \frac{h_{Q,h^m,\omega_{FS}}}{h_{Q,h_\infty^m,\omega_{FS}}} = \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) Td(\overline{T\mathbb{P}^n}_{FS}),$$

où  $h_{Q,h_\infty^m,\omega_{FS}}$  désigne la métrique de Quillen généralisée associée à  $h_\infty^m$  et  $\omega_{FS}$ , voir [10]. Donc,

$$\begin{aligned} -T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h^m)) &= \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) Td(\overline{T\mathbb{P}^n}_{FS}) \\ &\quad - T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h_\infty^m)) + \log \frac{h_{L^2, h^m, \omega_{FS}}}{h_{L^2, h_\infty^m, \omega_{FS}}}. \end{aligned}$$

On montre que la classe de Bott-Chern associée à la suite métrisée d'Euler sur  $\mathbb{P}^n$  :

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}_0 \longrightarrow \overline{\mathcal{O}(1)}_{FS}^{\oplus n+1} \longrightarrow \overline{T\mathbb{P}^n}_{FS} \longrightarrow 0,$$

est fermée, (voir par exemple [9, proposition 5.3]). On a donc,  $Td(\overline{T\mathbb{P}^n}_{FS}) = Td(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^{n+1}$ .

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) Td(\overline{T\mathbb{P}^n}_{FS}) &= \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) Td(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) + \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) (Td(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^{n+1} - 1) \\ &= 2 \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) - \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) \\ &\quad + \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) (Td(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^{n+1} - 1) \\ &= 2 \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) - \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n b_j \int_{\mathbb{P}^n} \widetilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^j. \end{aligned}$$



les  $b_j$  sont les coefficients de la série formelle en  $x$  suivante  $Td(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + b_1x + b_2x^2 + \dots$

Rappelons que  $h_{L^2, h^m, \infty}$  est le volume  $L^2$  définie dans (2.1). Par ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
-T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h^m)) &= \log h_{L^2, h^m, \infty} + 2 \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) \\
&\quad - \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) + \sum_{j=1}^n b_j \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^j \\
&\quad + \log h_{L^2, h^m, \omega_{FS}} - \log h_{L^2, h^m, \infty} - \log h_{L^2, h_\infty^m, FS} - T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h_\infty^m)) \\
&= V_{\infty, m}(h) - \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) + \sum_{j=1}^n b_j \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^j \\
&\quad + \log h_{L^2, h^m, \omega_{FS}} - \log h_{L^2, h^m, \infty} - \log \|\cdot\|_{L^2, h_\infty^m, \omega_{FS}}^2 - T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h_\infty^m)) \\
&\leq c_m - \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) + \sum_{j=1}^n b_j \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^j \\
&\quad - \log h_{L^2, h_\infty^m, \omega_{FS}} - T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h_\infty^m)) \quad \text{par (2.12), l'inégalité (8).}
\end{aligned}$$

Donc, on a montré que pour tout  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , et pour tout métrique  $h$  positive et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $E$  :

$$-T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h^m)) \leq c'_m - \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) + \sum_{j=1}^n b_j \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^j, \tag{9}$$

où on a posé  $c'_m := c_m - \log h_{L^2, h_\infty^m, \omega_{FS}} - T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h_\infty^m))$ . D'après [10], l'inégalité précédente s'étend à  $\mathcal{H}_0$ .

On se propose maintenant d'établir que la fonctionnelle suivante est majorée sur  $\mathcal{H}_0$  pour  $m$  assez grand :

$$-\int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) + \sum_{j=1}^n b_j \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^j,$$

Pour cela on aura besoin de montrer que :

$$\int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^j \leq j! 2^{n+1} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

En fait, cela résulte d'un fait plus général prouvé dans le lemme suivant :

**Lemme 3.4.** *Soit  $h \leq h_0 \leq h_\infty$  trois métriques hermitiennes, avec  $h, h_0 \in \mathcal{H}_0$ . On a,*

$$\int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_0)^j \leq j! 2^{n+1} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

*Démonstration.* Montrons ce lemme. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) \text{ch}(\mathcal{O}(m), h_0^m) &= \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m+1), h \otimes h_0^m, h_\infty \otimes h_0^m) \\
&= \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m+1), h \otimes h_0^m, h_\infty^{m+1}) - \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m+1), h_\infty \otimes h_0^m, h_\infty^{m+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+m)^{n+1} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), (h \otimes h_0^m)^{\frac{1}{m+1}}, h_\infty) - (1+m)^{n+1} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), (h_\infty \otimes h_0^m)^{\frac{1}{m+1}}, h_\infty) \\
&= (1+m)^{n+1} \int_{\Delta_n} \left( \frac{f+m f_0}{1+m} \right)^\sim(x) dx - (1+m)^{n+1} \int_{\Delta_n} \left( \frac{f_\infty+m f_0}{1+m} \right)^\sim(x) dx \quad \text{d'après (2.9)}.
\end{aligned}$$

Comme on a supposé que  $f_h \leq f_0 := \log \|\cdot\|_0(\exp(-\cdot)) \leq f_\infty$ ; alors  $\frac{f_h+m f_0}{1+m} \geq f_h$ , et  $\frac{f_\infty+m f_0}{1+m} \leq f_\infty$ , donc

$$\int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) \text{ch}(\mathcal{O}(m), h_0^m) \leq (1+m)^{n+1} \int_{\Delta_n} \check{f}_h(x) dx \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

On a  $\int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) \text{ch}(\mathcal{O}(m), h_0^m)$  est un polynôme à coefficients positifs. En effet, la forme généralisée  $\tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty)$  est positive, puisqu'elle est localement somme de termes de la forme

$$\left(-\log \frac{h}{h_\infty}\right) c_1(\mathcal{O}(1), h)^j c_1(\mathcal{O}(1), h_\infty)^{n-j} \quad j = 0, \dots, n,$$

les métriques sont positives,  $h \leq h_\infty$  et  $\text{ch}(\mathcal{O}(m), h_0^m)$  est positif aussi. On écrit :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) \text{ch}(\mathcal{O}(m), h_0^m) &= \sum_{k=0}^n \frac{m^k}{k!} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) c_1(\mathcal{O}(1), h_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{k!} m^k,
\end{aligned}$$

avec  $q_k := \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) c_1(\mathcal{O}(1), h_0)^k$  pour  $k = 0, \dots, n$ , et on pose  $q := \int_{\Delta_n} \check{f}(x) dx$ . Sous ces notations, (10) s'écrit :

$$\sum_{k=0}^n \frac{q_k}{k!} m^k \leq (1+m)^{n+1} q \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

On déduit que  $\frac{q_k}{k!} m^k \leq \sum_{j=0}^n \frac{q_j}{j!} m^j \leq q(1+m)^{n+1}$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . En particulier pour  $m = 1$ , on obtient  $q_k \leq k! 2^{n+1} q$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ . Notons que pour  $j = 0$ , si on prend  $m = 0$  alors  $q_0 \leq q$ .

Récapitulons, on a montré que

$$q_0 \leq q, \quad q_j \leq j! 2^{n+1} q \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

□

D'après (9), et en prenant  $h_0 = h_{FS}$ , et par (11), on obtient :

$$\begin{aligned}
-T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h^m)) &\leq c'_m - m^{n+1} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) + \sum_{j=1}^n b_j m^{n+1-j} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})^j \\
&= c'_m - m^{n+1} q + \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{j!} b_j m^{n+1-j} \quad \text{notons que } q = \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) \\
&\leq c'_m - m^{n+1} q + \sum_{j=1}^n 2^{n+1} q |b_j| m^{n+1-j} \\
&= \left(-m^{n+1} + \sum_{j=1}^n 2^{n+1} |b_{n+1-j}| m^j\right) q - c'_m,
\end{aligned}$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et  $h \leq h_{FS}$ , positive et invariante par l'action du tore compact  $(\mathbb{S}^1)^n$ .

On peut trouver  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $-m^{n+1} + \sum_{j=1}^n 2^{n+1} |b_{n+1-j}| m^j \leq 0$  pour tout  $m \geq m_0$ . Comme  $q \geq 0$ , on conclut que

$$-T((\mathbb{P}^n, \omega_{FS}); (\mathcal{O}(m), h^m)) \leq -c'_m \quad \forall m \geq m_0.$$

□

**Remarque 3.5.** *En dimension 1, on obtient :*

$$D(\mathcal{O}(m), h^m) \leq -c'_m \quad \forall h \in \mathcal{H}_0 \quad \forall m \geq 1.$$

**Corollaire 3.6.** *Sous ces hypothèses, on a*

$$\prod_{q=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} D_{2q}(\mathcal{O}(m), h^m) \leq -c'_m \prod_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} D_{2q+1}(\mathcal{O}(m), h^m),$$

pour tout  $h \in \mathcal{H}_0$ .

## 4 Rappel sur la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\omega_0}$ et résultats antérieurs connexes

Dans ce paragraphe, on introduit deux fonctionnelles classiques sur l'espace de métriques positives sur un fibré en droites ample sur une variété kählérienne compacte. Soit  $X$  une variété compacte kählérienne. Si  $L$  est un fibré en droites ample sur  $X$ , alors il existe une forme de Kähler  $\omega_0$  dans la première classe de Chern  $c_1(L)$ . On pose

$$\mathcal{H}_{\omega_0} = \{u \in \mathcal{C}^\infty(X) \mid \omega_u := dd^c u + \omega_0 > 0\},$$

cet ensemble s'identifie à l'ensemble des métriques  $\mathcal{C}^\infty$  définies positives sur  $L$ . Classiquement, on définit deux fonctionnelles,  $\mathcal{E}_{\omega_0}$  et  $\mathcal{L}_{\omega_0}$ , sur  $\mathcal{H}_{\omega_0}$ . La première fonctionnelle  $\mathcal{E}_{\omega_0}$ , appelée la fonctionnelle d'énergie qui apparaît dans les travaux d'Aubin cf. [1] et Mabuchi cf. [11], elle se définit comme suit :

$$\mathcal{E}_{\omega_0}(u) := \frac{1}{(n+1)! \text{Vol}(\omega_0)} \sum_{j=0}^n \int_X u (dd^c u + \omega_0)^j \wedge \omega_0^{n-j}.$$

On a,  $\omega_0$  définit une métrique kählérienne sur  $X$ , et donc sur  $K_X$ . Soit  $u \in \mathcal{H}_{\omega_0}$ ,  $u$  définit donc une métrique sur  $L$ . Cela nous donne une métrique sur  $H^0(X, L \otimes K_X)$ . La fonctionnelle  $\mathcal{L}_{\omega_0}$  est alors définie comme suit :

$$\mathcal{L}_{\omega_0}(u) := -\frac{1}{N} \log \det(\langle s_i, s_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq N},$$

avec  $s_1, \dots, s_N$  est un ensemble orthogonal de sections globales de  $L \otimes K_X$  pour la métrique définie par  $\omega_0$  et formant une base pour  $H^0(X, L \otimes K_X)$ , voir [3].

On pose,

$$\mathcal{F}_{\omega_0} = \mathcal{E}_{\omega_0} - \mathcal{L}_{\omega_0}.$$

$L$  est supposé ample, c'est à dire que  $L$  admet une métrique  $h_0$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\omega_0 := c_1(L, h_0)$  soit une forme de Kähler. On pose

$$\mathcal{H}_{\omega_0} := \{u \in \mathcal{C}^\infty(X) \mid \omega_u := dd^c u + \omega_0 > 0\}$$

cet ensemble s'identifie avec l'espace des métriques hermitiennes de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et positives sur  $L$ .

Sur  $\mathcal{H}_{\omega_0}$ , on considère deux fonctionnelles

1. La fonctionnelle d'énergie,  $\mathcal{E}_{\omega_0}$  :

$$\mathcal{E}_{\omega_0}(u) := \frac{1}{(n+1)!V} \sum_{i=0}^n \int_X u (dd^c + \omega_0)^j \wedge \omega_0^{n-j} = \frac{1}{V} \int_X \tilde{\text{ch}}(L, h_u, h_0),$$

où  $V = \int_X \frac{\omega_0^n}{n!}$ .

2. La fonctionnelle  $\mathcal{L}_{\omega_0}$ , voir [3, § 1.2] :

On munit le fibré en droites canonique  $K_X$ , de la métrique induite par  $\omega_0$ . On pose :

$$\mathcal{L}_{\omega_0}(u) := -\frac{1}{N} \log \det(\langle s_i, s_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq N},$$

$N = \dim H^0(X, L + K_X)$ , supposé non nul, où  $\{s_i\}$  est une base de  $H^0(X, L + K_X)$ , orthogonale pour la métrique induite par  $\omega_0$ .

Dans [3], Berman considère la fonctionnelle suivante sur  $\mathcal{H}_{\omega_0}$  :

$$\mathcal{F}_{\omega_0} := \mathcal{E}_{\omega_0} - \mathcal{L}_{\omega_0}, \quad (12)$$

qui est invariante par addition de constantes.

Supposons que  $(X, L)$  est  $K$ -homogène, c'est à dire il existe un groupe de Lie compact semi-simple  $K$  qui agit transitivement sur  $X$ , et que cette action se relève à  $L$ . Soit  $\omega_0$  l'unique forme de Kähler invariante par l'action de  $K$  sur  $X$ .

**Théorème 4.1.** *Soit  $L$  un fibré en droites holomorphe  $K$ -homogène sur  $X$ , alors*

$$\mathcal{F}_{\omega_0}(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\omega_0},$$

*avec égalité lorsque  $u$  est constante, modulo l'action de  $\text{Aut}_0(X, L)$ .*

*Démonstration.* Voir [3, corollaire 2]. □

#### 4.1 Comparaison de $\mathcal{F}_{\omega_0}$ et de $V_{\infty, *}$

On se propose dans ce paragraphe de comparer  $V_{\infty, m}$ , la fonctionnelle introduite dans ce texte, avec l'approche de [3].

On considère  $\mathbb{P}^n$  muni d'une forme de Kähler  $\omega_0 := c_1(O(1), h_0)$  invariante par  $(\mathbb{S}^1)^n$ . D'après [3], on a

$$\mathcal{F}_{m\omega_0}(u) = \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} \log \prod_{\nu \in \mathcal{P}_{m-2}} \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \omega_0}^2} + \frac{1}{V(\mathcal{O}(m))} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_0^m) \leq 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

pour toute  $h \in \mathcal{H}_{\omega_0}$ , où on a posé  $u = -m \log \frac{h}{h_0}$ .

**Théorème 4.2.** *Il existe  $N \in \mathbb{N}$  et une constante  $c$  qui dépend uniquement de  $h_0$  telle que*

$$\mathcal{F}_{m\omega_0}(u_h) \leq \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} V_{m-2}(h) + c, \quad \forall h \in \mathcal{H}_0 \quad \forall m \geq N.$$

où  $u_h := -m \log \frac{h}{h_{FS}}$ .

*Démonstration.* Notons qu'il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $m \geq N$ , on a  $\frac{n! \binom{n+m-2}{n} m^{n+1}}{m^n} \leq 2(m-2)^{n+1}$ . En effet, par la formule de Stirling, on trouve que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n! \binom{n+m-2}{n}}{m^n} = \frac{1}{e^n}$ .

Comme  $\mathbb{P}^n$  est compact, alors il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\omega_{FS}^n \leq t_0 \omega_\infty^n$ . Soit  $m \geq N$ , on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} \log \prod_{\nu \in \mathcal{P}_{m-2}} \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \omega_0}^2} + \frac{1}{V(\mathcal{O}(m))} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_0^m) \\
& \leq \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} \log \prod_{\nu \in \mathcal{P}_{m-2}} \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2} + \frac{1}{V(\mathcal{O}(m))} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_\infty^m) \\
& \quad - \frac{1}{V(\mathcal{O}(m))} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h_0^m, h_\infty^m) + \log t_0 \\
& \leq \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} \left( \log \prod_{\nu \in \mathcal{P}_{m-2}} \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2} + \frac{\binom{n+m-2}{n} m^{n+1}}{m^n} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) \right) \\
& \quad - \frac{1}{V(\mathcal{O}(m))} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h_0^m, h_\infty^m) + \log t_0 \\
& \leq \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} \left( \log \prod_{\nu \in \mathcal{P}_{m-2}} \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \infty}^2} + 2(m-2)^{n+1} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(1), h, h_\infty) \right) \\
& \quad - \frac{1}{V(\mathcal{O}(m))} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h_0^m, h_\infty^m) + \log t_0 \\
& = \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} V_{m-2}(h) - \frac{1}{V(\mathcal{O}(m))} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h_0^m, h_\infty^m) + \log t_0.
\end{aligned}$$

Comme  $\frac{1}{V(\mathcal{O}(m))} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h_0^m, h_\infty^m) \geq 0$ , par conséquent :

$$\frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} \log \prod_{\nu \in \mathcal{P}_{m-2}} \langle z^\nu, z^\nu \rangle_{L_{h^m, \omega_0}^2} + \frac{1}{V(\mathcal{O}(m))} \int_{\mathbb{P}^n} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}(m), h^m, h_0^m) \leq \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} V_{m-2}(h) + \log t_0.$$

Donc, en posant  $u_h = -\log \frac{h}{h_{FS}}$ , on a montré que

$$\mathcal{F}_{m\omega_0}(u_h) \leq \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} V_{m-2}(h) + \log t_0 \quad \forall h \in \mathcal{H}_0 \quad \forall m \geq N.$$

□

**Corollaire 4.3.** Si  $V_{\infty, m}$  est majorée alors  $\mathcal{F}_{m\omega_0}$  l'est aussi.

*Démonstration.* Cela résulte directement du théorème précédent. □

Pour tout  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , on note par  $\mathcal{H}_{m\omega_0, 0}$  le sous ensemble de  $\mathcal{H}_{m\omega_0}$  qui correspond aux métriques positives  $\mathcal{C}^\infty$  invariantes par  $(\mathbb{S}^1)^n$  sur  $\mathcal{O}(m)$ . On retrouve une version faible du (4.1) :

**Corollaire 4.4.** Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\mathcal{F}_{m\omega_0}(u) \leq c_m'' \quad \forall u \in \mathcal{H}_{m\omega_0, 0} \quad \forall m \geq N,$$

où  $c_m''$  est une constante réelle qui dépend uniquement de  $m$  et  $\omega_0$ .

*Démonstration.* On a montré que, dans la proposition précédente que :

$$\mathcal{F}_{m\omega_0}(u_h) \leq \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} V_{m-2}(h) + \log t_0 \quad \forall h \in \mathcal{H}_0 \quad \forall m \geq N.$$

D'après (2.12), on déduit que

$$\mathcal{F}_{m\omega_0}(u_h) \leq \frac{1}{\binom{n+m-2}{n}} c_{m-2} + \log t_0.$$

□

## Références

- [1] Thierry Aubin. Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité. *J. Funct. Anal.*, 57(2) :143–153, 1984.
- [2] Victor V. Batyrev and Yuri Tschinkel. Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori. *Internat. Math. Res. Notices*, (12) :591–635, 1995.
- [3] Robert Berman. Sharp inequalities for determinants of Toeplitz operators and dbar-Laplacians on line bundles. *arXiv.org*, arXiv :1105.5584v1 [math.AG], Mai 2011.
- [4] J.-M. Bismut, H. Gillet, and C. Soulé. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott-Chern forms and analytic torsion. *Comm. Math. Phys.*, 115(1) :49–78, 1988.
- [5] José Ignacio Burgos Gil, Patrice Philippon, and Martín Sombra. Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights. *arXiv.org*, arXiv :1105.5584v1 [math.AG], Mai 2011.
- [6] Michel Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 3 :507–588, 1970.
- [7] William Fulton. *Introduction to toric varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [8] H. Gillet and C. Soulé. Upper bounds for regularized determinants. *Comm. Math. Phys.*, 199(1) :99–115, 1998.
- [9] Henri Gillet and Christophe Soulé. Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric. II. *Ann. of Math. (2)*, 131(2) :205–238, 1990.
- [10] Mounir Hajli. Extension de la torsion analytique holomorphe aux fibrés en droites intégrables. *Arxiv*.
- [11] Toshiaki Mabuchi.  $K$ -energy maps integrating Futaki invariants. *Tohoku Math. J. (2)*, 38(4) :575–593, 1986.
- [12] Vincent Maillot. Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, 80 :vi+129, 2000.
- [13] David Witt Nyström. Transforming metrics on a line bundle to the Okounkov body. *arXiv.org*, arXiv :0903.5167v1 [math.CV], March 2009.

National Center for Theoretical Sciences, (Taipei Office)  
National Taiwan University, Taipei 106, Taiwan  
e-mail : hajli@math.jussieu.fr